Einführung in die Fuzzy Logic

- Entwickelt von L. Zadeh in den 60er Jahren
- Benutzt unscharfe (*fuzzy*) Begriffe und *linguistische* Variablen
- Im Gegensatz zur Booleschen Logik $\{0,1\}$ wird das ganze Intervall [0,1] benutzt (multi valued logic)
- Wissen wird durch einfache Regeln repräsentiert
  (meist: (wenn .., dann ..)-Regeln).

Eingenschaften von Fuzzy Logik

- Robust
- Ohne aufwendige mathematische Modelle kann eine effektive (nichtlineare) Steuerung realisiert werden.
- Daher: geringer Rechenaufwand. Kann auch in eingebetteten Systemen (*embedded systems*) angewandt werden.
- Wissen über komplexe Systeme kann von Experten in umgangssprachlichen Begriffen formuliert werden.

Anwendungsfelder

- Direkte Fuzzy-Regelung und Steuerung
- Fuzzy-Logik zur Parameter-Steuerung oder Adaption
- Prädiktivregler mit Fuzzy-Prozessmodellen
- Mustererkennung/Klassifikation
- Diagnose
- Datenbasierte Modellierung/Identifikation
- Fuzzy-basierte Prozessführung und Optimierung
- Experten- bzw. Entscheidungsunterstützungs-Systeme

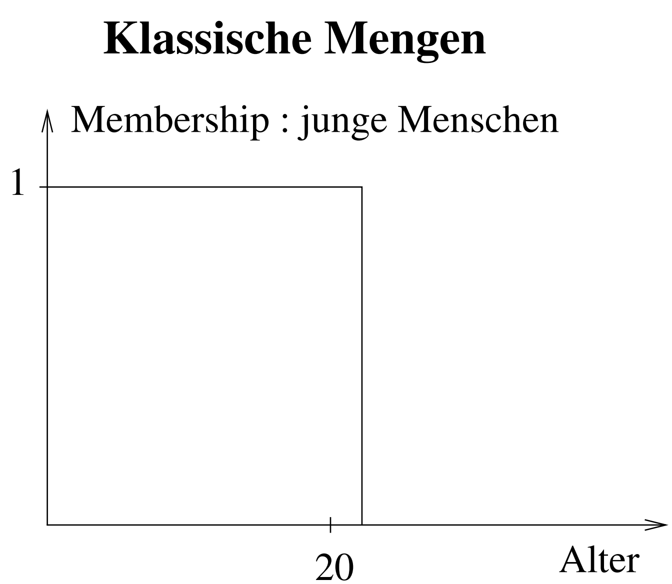
Einteilung nach: Erfolgreiche Anwendungen von Fuzzy Logik und Fuzzy Control; at Automatisierungstechnik 50 (2002) 10 Oldenbourg Verlag

Fuzzy Mengen und Zugehörigkeits-Funktionen

Im Gegensatz zu klassischen Mengen gibt es bei Fuzzy Mengen auch eine teilweise Zugehörigkeit (der Elemente) zu einer Menge.

Also: statt **entweder-oder** zu **x-Prozent** dazugehörig.

Beispiel: Menge der jungen Menschen



Zugehörigkeits-Funktionen - Definition

Die Zugehörigkeits-Funktion μ zur Fuzzy Menge A über der Variablen x wird geschrieben als:

$$\mu_A(x)$$

Dabei liegt der Wertebereich von $\mu_A(x)$ zwischen 0 und 1

$$\mu_A(x) \in [0, 1]$$

Zugehörigkeits-Funktionen *(membership functions)*

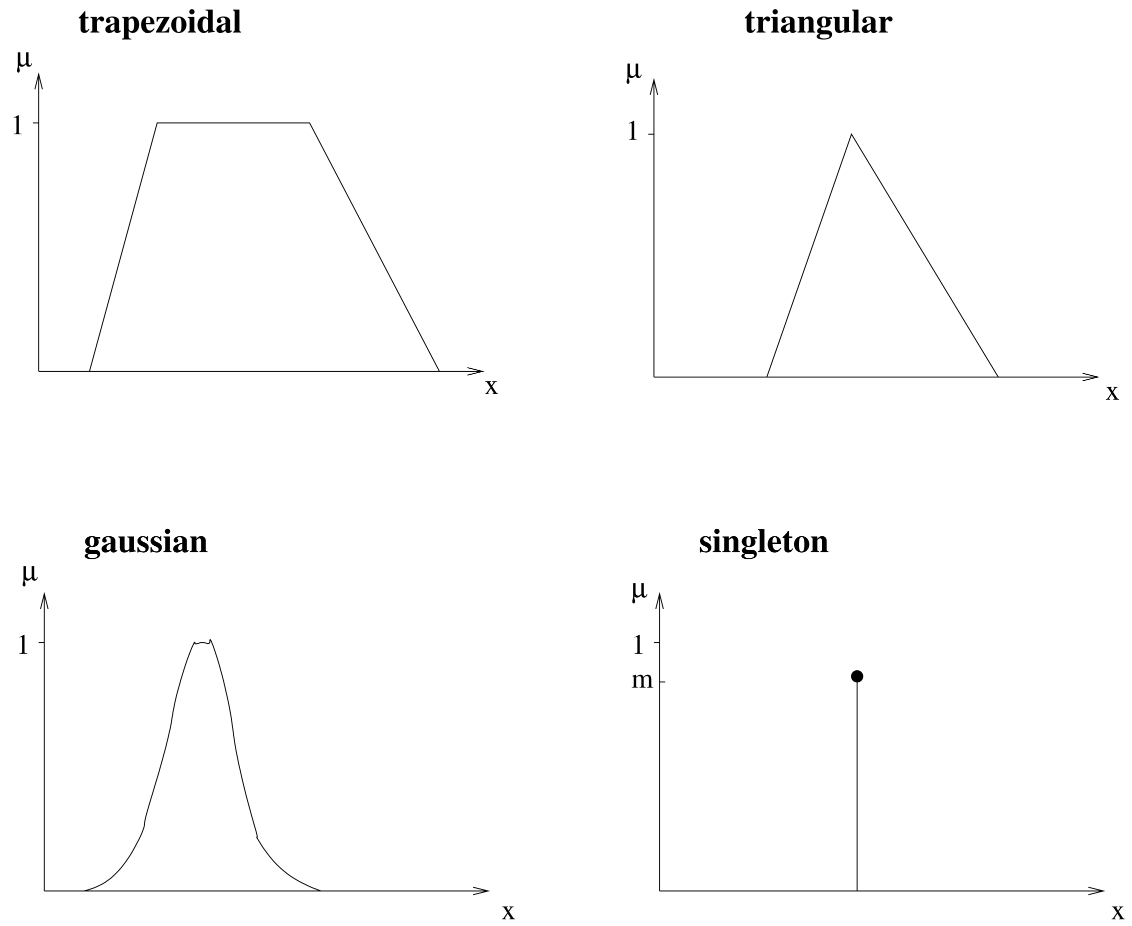
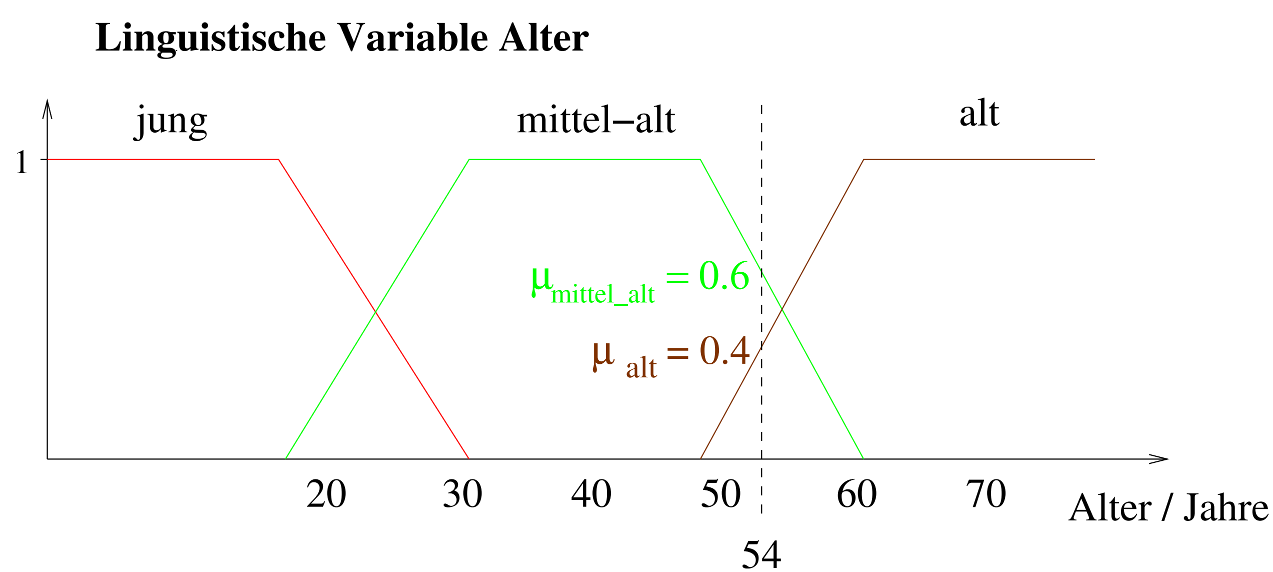


Abbildung 1: Die vier gebräuchlichsten Zugehörigkeits-Funktionen (membership-functions). Diese besitzen wenige Parameter zu deren Charakterisierung.

Zugehörigkeits-Funktionen und Linguistische Variablen

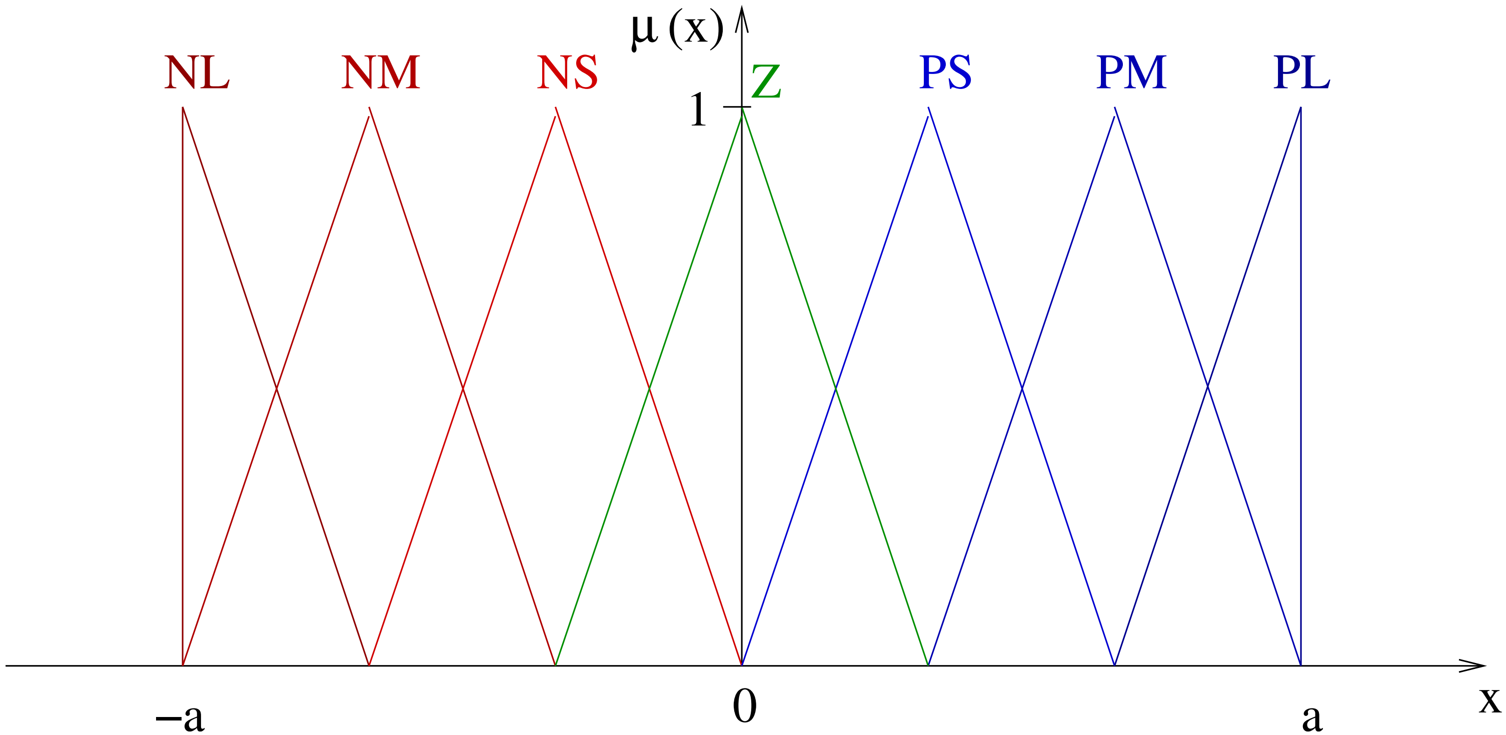
Bedeckt man den Definitionsbereich einer Variablen mit Fuzzy Mengen, die eine umgangssprachliche Bedeutung besitzen (Semantik), erhält man eine linguistische Variable.
Also: **keine Zahlen** wie in der Numerik, sondern **umgangssprachliche Begriffe**.

Beispiel: Alter von Menschen (linguistische Variable) mit drei linguistischen Werten



Standard Granularisierung

Standard Granularisierung mit einer ungeraden (hier sieben) Anzahl von Zugehörigkeits-Funktionen über das Intervall [-a,a]:



Zusammenfassung: Membership-Funktionen

- Granularisierung statt Quantisierung
- Gruppierungen in Cluster mit unscharfen Rändern
- Meist manuelle Granularisierung über Expertenwissen

Fuzzy Mengen und Fuzzy Logik

In der Fuzzy Logik wird das Wissen in Form von Regeln formalisiert. Diese Regeln werden durch logische Operatoren ausgedrückt.

Um auf Fuzzy Mengen logische Operatoren, wie sie aus der booleschen Logik bekannt sind, anwenden zu können, müssen diese für Fuzzy Mengen definiert werden. Eine Möglichkeit ist die Min-Max Version (nach Zadeh):

- Konjunktion (UND): $\mu_{A \wedge B}(x) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Disjunktion (ODER): $\mu_{A \vee B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Komplement: $\mu_{\neg A}(x) := 1 - \mu_A(x)$

Bespiel: Eine Person gehört zur (Fuzzy) Menge „junge Menschen“ zum Grade 0.5 UND zur Menge „große Menschen“ zu 0.8. Dann gehört er zur Menge „junge und große Menschen“ zum Grad 0.5.

Fuzzy Mengen und Fuzzy Logik

Eine andere Möglichkeit die Konjunktion und Disjunktion zu definieren ist. Produkt / Begrenzte-Summe Version:

- Konjunktion II (UND): $\mu_{A \wedge B}(x) := \mu_A \cdot \mu_B$
- Disjunktion II (ODER): $\mu_{A \vee B}(x) :=$ min$\{\mu_A + \mu_B, 1\}$

Beachte: Nicht alle Tautologien der klassischen Logik sind im Fuzzy Fall wahr! z.B.:

- $A \wedge \neg A \neq \emptyset$
- $A \vee \neg A \neq I$

Fuzzy Mengen und Fuzzy Logik

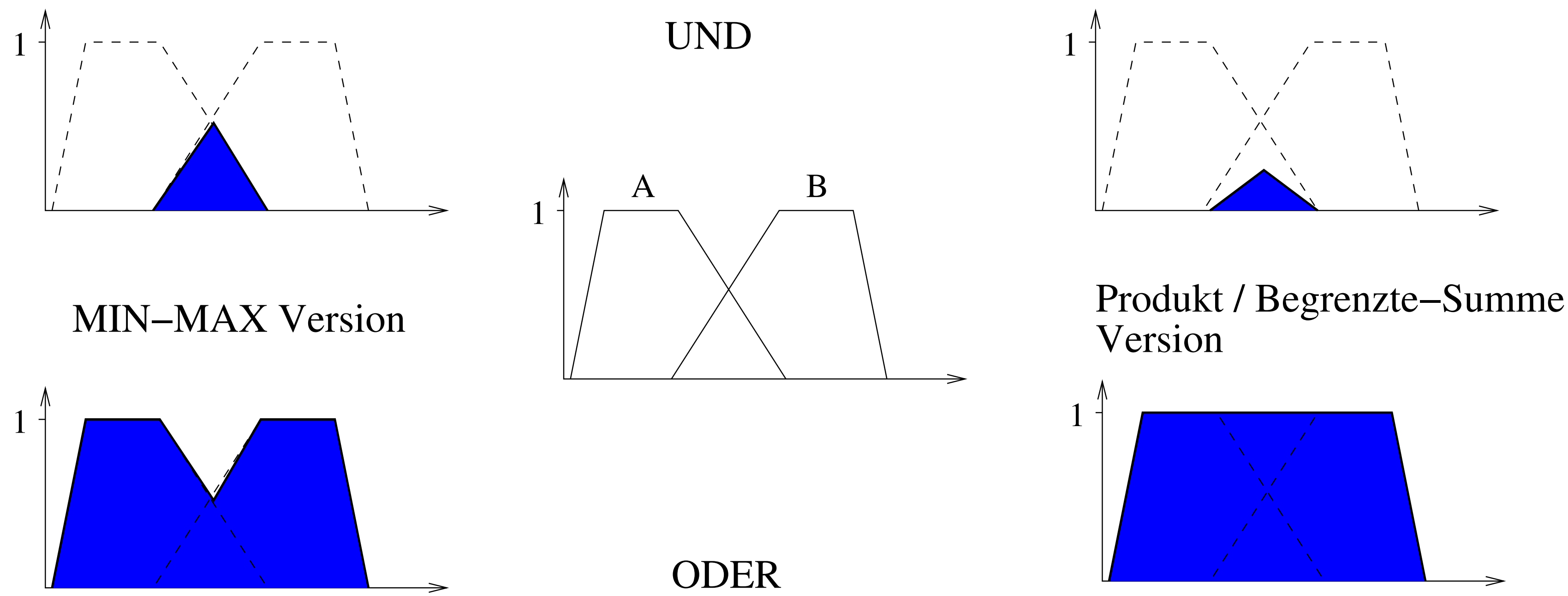


Abbildung 2: Visualisierung der Definitionen der Konjunktion und Disjunktion: Zadehs min/max Interpretation links, die Produkt/ Begrenzte-Summe Variante rechts. Jeweils oben ist die Konjunktion und unten die Disjunktion dargestellt.

Modus Ponens (lat. Modus der Behauptung)

Der „klassische“ Modus Ponens ist eine Vorhersage-Regel (Schlussregel) für den Fall, dass ein Ereignis A eintritt:

Wenn x gleich A, dann y gleich B	$A \Rightarrow B$
x ist A	A
———————————	—————
y ist B	$\vdash B$

Formal: $[\ A \wedge (\ A \Rightarrow B\ )\ ] \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ steht dabei für den Implikation-Operator, dies ist eine Formalisierung der (wenn .., dann ..)-Anweisung. Dieser muss für Fuzzy Mengen definiert werden.

Implikation

Der Implikations-Operator $\Rightarrow$ kann auf verschiedene Weise durch die Basis-Junktoren $(\neg, \vee, \wedge)$ ausgedrückt werden. Der direkteste Weg ist eine explizite Benutzung. z.B. A $\Rightarrow$ B $:=$ $\neg$ A $\vee$ (A $\wedge$ B).

Die verschiedene Definitionen der Implikation führen bei der Fuzzy Logik zu unterschiedlichen Vorhersagen der Fuzzy Systeme.

Fuzzy Regeln und generalisierter Modus Ponens

Die Regeln, die das (Experten-)Wissen widerspiegeln, sind in Fuzzy Systemen, erweiterte (wenn.., dann..)-Regeln, also ein erweiterter Modus Ponens. Beim diesem generalisierten Modus Ponens, gibt es auch eine Implikationsregel. Aber die Verteilung von A (Antezedent der Implikation) muss nicht mit der Verteilung von A′ übereinstimmen, um eine Schlussfolgerung zu treffen (daher: generalisierter Modus Ponens):

Wenn x gleich A, dann ist y gleich B	A $\Rightarrow$ B
x ist A'	$\mu_{A'}(x)$
―――――――――――――――	――――――
y ist B'	$\vdash \mu_{B'}(y)$

Wissens - Inferenz

Das (Experten-)Wissen über eine Anwendungsdomäne wird bei der Fuzzy Logik meist in Form von (wenn.., dann..)-Regeln, d.h. der Implikation, repräsentiert.

Inferenzregeln erzeugen aus den Formel der Wissensbasis neue Formel.

Der Modus Ponens ist eine solche **Inferenzregel**, die den Implikationsoperator benutzt.

Dabei hängt die Interpretation der (Fuzzy) Inferenz von der (nicht eindeutigen) Definition des Implikationsoperators ab. D.h. unterschiedliche Definitionen des Implikationsoperator ergeben unterschiedliche Ergebnisse!